

DER EBENE ELASTISCHE SPANNUNGSZUSTAND IN KOMPLEXER DARSTELLUNG

L. FÖPPL

München

(Received 21 September 1961)

Zusammenfassung—Die beiden Invarianten des ebenen Spannungszustandes werden mit Hilfe der Gleichgewichtsgleichungen und der Verträglichkeitsgleichung allgemein gültig durch eine Funktion dargestellt. Als Beispiel dient der Spannungszustand, der durch zwei entgegengesetzt gerichtete Einzelkräfte hervorgerufen wird. Aus der theoretischen Lösung werden die Isochromaten berechnet und mit einem spannungsoptischen Versuch verglichen.

DIE GRUNDLAGEN

LEGT man in die Ebene eines elastischen Spannungszustandes ein kartesisches Koordinatensystem x, y und bezeichnet die Spannungen in Schnitten parallel zu den Koordinatenachsen mit σ_x, σ_y und τ , so lauten die Gleichgewichtsgleichungen:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad (1b)$$

Positives Vorzeichen der Normalspannungen σ_x und σ_y soll Zug und negatives Druck bedeuten. Auch das positive Vorzeichen der Schubspannung muss vereinbart werden. Durch das positive Vorzeichen vor τ in den Gleichgewichtsgleichungen (i) wird die positive und negative Richtung der Schubspannung bestimmt.

Die Verträglichkeitsbedingung für die elastischen Spannungen ist von τ unabhängig. Mit der Abkürzung

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2)$$

lautet sie:

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (3)$$

Statt der Veränderlichen x und y sollen die konjugiert komplexen Veränderlichen

$$\left. \begin{aligned} z &= x + iy \\ \bar{z} &= x - iy \end{aligned} \right\} (4)$$

eingeführt werden. Die Umkehrung dieser Koordinatentransformation ist

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad y = -i \frac{z - \bar{z}}{2} \quad (5)$$

Zunächst wird gezeigt, dass die beiden Gleichgewichtsgleichungen (i) in der komplexen Darstellung einer *einzig*en gleichwertig sind. Zu diesem Zweck bilde man aus den Gl. (1) mit Hilfe der imaginären Einheit i :

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) = 0 \quad (6)$$

Schreibt man diese Gleichung um in:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x + i\tau) + i \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y - i\tau) = 0 \quad (7)$$

und beachtet, dass wegen der Gl. (4)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x + i\tau) &= \frac{\partial (\sigma_x + i\tau)}{\partial z} + \frac{\partial (\sigma_x + i\tau)}{\partial \bar{z}} \\ \text{und} \\ \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y - i\tau) &= i \frac{\partial (\sigma_y - i\tau)}{\partial z} - i \frac{\partial (\sigma_y - i\tau)}{\partial \bar{z}} \end{aligned} \right\} (8)$$

gesetzt werden kann, so geht Gl. (7) bei Einsetzen dieser beiden letzten Ausdrücke über in

$$\frac{\partial(\sigma_x + i\tau)}{\partial z} - \frac{\partial(\sigma_y - i\tau)}{\partial z} + \frac{\partial(\sigma_x + i\tau)}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 \quad (11)$$

$$+ \frac{\partial(\sigma_y - i\tau)}{\partial \bar{z}} = 0$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + i\tau \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) = 0 \quad (9)$$

Die hierzu konjugierte Gleichgewichtsgleichung erhält man durch Wechsel des Vorzeichens von (i) zu:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - i\tau \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) = 0 \quad (9a)$$

Bemerkenswert ist, dass in der Gleichgewichtsgleichung nur die Spannungssumme und die Spannungen in der Verbindung $[(\sigma_x - \sigma_y)/2] \pm i\tau$ auftreten. Es sind dies die beiden Invarianten des Spannungszustandes.

Um auch die Verträglichkeitsgleichung (3) komplex darzustellen, beachte man, dass für eine Funktion von x und y , die in den Koordinaten z und \bar{z} umgeschrieben wird, wegen Gl. (4) die Beziehungen gelten:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = i \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} - i \frac{\partial F}{\partial z}$$

Bei nochmaligem Differenzieren erhält man hieraus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z} \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z}^2} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z} \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z}^2} \\ &= - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z}^2} \end{aligned}$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen ergibt

$$\Delta F \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (10)$$

Die Verträglichkeitsgleichung (3) lautet demnach in komplexer Darstellung:

Diese Gleichung sagt aus, dass sich die Spannungssumme $\sigma_x + \sigma_y$ durch die Summe oder die Differenz zweier gleicher Funktionen von z bzw. \bar{z} folgendermassen darstellen lässt:

$$\sigma_x + \sigma_y = \phi(z) + \phi(\bar{z}) \quad (12)$$

oder

$$\sigma_x + \sigma_y = -i[\psi(z) - \psi(\bar{z})] \quad (12a)$$

In beiden Fällen wird Gl. (11) befriedigt.

Fürs weitere soll der Ansatz nach Gl. (12) für die Spannungssumme zu Grunde gelegt werden. Damit geht die Gleichgewichtsgleichung (9) über in:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + i\tau \right) = - \frac{1}{2} \frac{d\phi(\bar{z})}{d\bar{z}},$$

woraus durch Integration nach z folgt

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + i\tau = - \frac{z}{2} \frac{d\phi(\bar{z})}{d\bar{z}} + f(\bar{z}) \quad (13)$$

Darin bedeutet $f(\bar{z})$ eine zunächst unbekannte Funktion von \bar{z} , die dazu dient, Randbedingungen zu erfüllen; $f(\bar{z})$ für sich genommen gehört zu einem *harmonischen* Spannungszustand, für den die erste Invariante $\sigma_x + \sigma_y$ verschwindet. Wenn in der Spannungssumme y nur in geraden Potenzen auftritt, so darf man das Vorzeichen von y umkehren. Dies bedeutet aber, dass zur Befriedigung der Randbedingungen zwei Funktionen $f_1(\bar{z}) + f_2(z)$ zur Verfügung stehen.

2. BEISPIEL: ZWEI ENTGEGENSETZT GERICHTETE EINZELKRÄFTE

In der unendlichen Ebene sollen auf einer Geraden, die als x -Achse dient, an zwei Punkten O_1 und O_2 im Abstand $2a$ zwei entgegengesetzt gerichtete Kräfte P angreifen (s. Abb. 1). An einer beliebigen Stelle A der Ebene entsteht dabei ein ebener Spannungszustand, der sich aus den strahlenförmigen Spannungen σ_{r_1} und σ_{r_2} zusammensetzt mit

$$\sigma_{r_1} = \frac{P}{\pi a} \frac{a \cos \varphi_1}{r_1} \quad \text{und} \quad \sigma_{r_2} = - \frac{P}{\pi a} \frac{a \cos \varphi_2}{r_2} \quad (14)$$

Hieraus folgt durch Überlagerung von σ_{r_1} und σ_{r_2} :

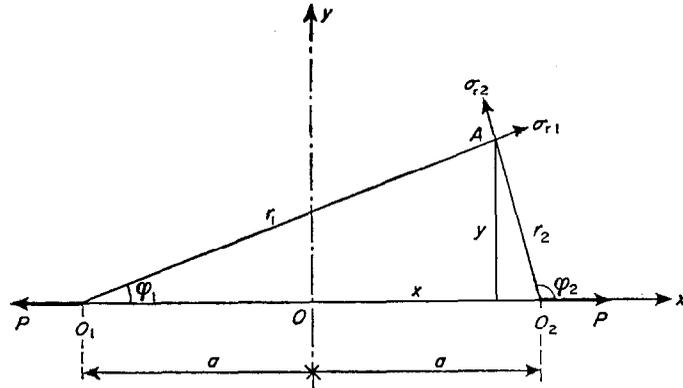


ABB. 1.

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= \sigma_{r1} \cos^2 \varphi_1 + \sigma_{r2} \cos^2 \varphi_2 \\ &= \frac{P}{\pi a} \left(\frac{a \cos^3 \varphi_1}{r_1} - \frac{a \cos^3 \varphi_2}{r_2} \right) \\ \sigma_y &= \sigma_{r1} \sin^2 \varphi_1 + \sigma_{r2} \sin^2 \varphi_2 \\ &= \frac{P}{\pi a} \left(\frac{a \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1}{r_1} - \frac{a \cos \varphi_2 \sin^2 \varphi_2}{r_2} \right) \\ \tau_{xy} = \tau &= \sigma_{r1} \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 + \sigma_{r2} \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 \\ &= \frac{P}{\pi a} \left(\frac{a \cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_1}{r_1} - \frac{a \cos^2 \varphi_2 \sin \varphi_2}{r_2} \right) \end{aligned} \right\} (15)$$

Die erste Invariante wird dann:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} &= \frac{\sigma_{r1} + \sigma_{r2}}{2} \\ &= \frac{P}{2\pi a} \left(\frac{a \cos \varphi_1}{r_1} - \frac{a \cos \varphi_2}{r_2} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

und die zweite Invariante:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + i\tau &= \frac{P}{2\pi a} \left(\frac{a \cos \varphi_1}{r_1} \exp(2i\varphi_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a \cos \varphi_2}{r_2} \exp(2i\varphi_2) \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Um die Spannungen dimensionslos darstellen zu können, beziehe man sie auf die Einheitsspannung:

$$\frac{P}{2\pi a} = 1 \quad (18)$$

Entsprechend den Überlegungen von §1 soll der Spannungszustand in komplexer Schreibweise dargestellt werden. Man beachte die Beziehungen:

$$z_1 = r_1 \exp(i\varphi_1) = z + a;$$

$$z_2 = r_2 \exp(i\varphi_2) = z - a;$$

woraus

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{z + a} = \frac{1}{r_1} \exp(-i\varphi_1);$$

$$\frac{1}{\bar{z}_1} = \frac{1}{\bar{z} + a} = \frac{1}{r_1} \exp(i\varphi_1)$$

sowie

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{z - a} = \frac{1}{r_2} \exp(-i\varphi_2);$$

$$\frac{1}{\bar{z}_2} = \frac{1}{\bar{z} - a} = \frac{1}{r_2} \exp(i\varphi_2)$$

folgen. Demnach ist:

$$\frac{1}{a + z} + \frac{1}{a + \bar{z}} = \frac{2 \cos \varphi_1}{r_1};$$

$$\frac{1}{a - z} + \frac{1}{a - \bar{z}} = -\frac{2 \cos \varphi_2}{r_2} \quad (19)$$

Vergleicht man Gl. (12) mit Gl. (16) unter Berücksichtigung der Gl. (18) und (19), so erhält man:

$$\phi(z) = \frac{a}{a + z} + \frac{a}{a - z} \quad (20)$$

Um die zweite Invariante komplex darzustellen, bilde man

$$\frac{d\phi(z)}{dz} = -\frac{a}{(a+z)^2} + \frac{a}{(a-z)^2} \quad (21)$$

Damit folgt aus Gl. (13)

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + i\tau = -\frac{z}{2} \left(-\frac{a}{(a+\bar{z})^2} + \frac{a}{(a-\bar{z})^2} \right) + f(\bar{z}) \quad (22)$$

Mit

$$f(\bar{z}) = \frac{a}{2} \left(\frac{2a+\bar{z}}{(a+\bar{z})^2} + \frac{2a-\bar{z}}{(a-\bar{z})^2} \right) \quad (23)$$

geht Gl. (22) über in

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + i\tau &= \frac{z}{2} \left(\frac{a}{(a+\bar{z})^2} - \frac{a}{(a-\bar{z})^2} \right) \\ &+ \frac{a}{2} \left(\frac{2a+\bar{z}}{(a+\bar{z})^2} + \frac{2a-\bar{z}}{(a-\bar{z})^2} \right) \\ &= \frac{a}{2} \left(\frac{2a+z+\bar{z}}{(a+\bar{z})^2} + \frac{2a-z-\bar{z}}{(a-\bar{z})^2} \right) \end{aligned} \right\} (24)$$

Dieser in komplexer Darstellung wiedergegebene Ausdruck für die zweite Invariante stimmt mit dem Wert nach Gl. (17) überein, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man in Gl. (24) $z + \bar{z} = 2x$ einsetzt und

$$\frac{1}{(a+\bar{z})^2} = \frac{1}{r_1^2} \exp(2i\varphi_1); \quad \frac{1}{(a-\bar{z})^2} = \frac{1}{r_2^2} \exp(2i\varphi_2)$$

berücksichtigt.

Für die weiteren Betrachtungen ist es zweckmässig, das zu den Angriffspunkten O_1 und O_2 der beiden Kräfte P gehörige Bipolarkoordinatensystem zu Grunde zu legen (s. Abb. 2). Bekanntlich sind die Koordinatenlinien dieses Systems überall senkrecht aufeinander stehende Kreise (s. z. B. "Drang und Zwang" Bd. 3, S. 141). Die eine Kreisschar sind die durch die Pole O_1 und O_2 laufenden "Polkreise", deren Mittelpunkte O_β auf der y -Achse liegen (s. Abb. 2). Die Mittelpunkte O_α der zweiten Kreisschar, der sogen. "Apollonischen Kreise", liegen auf der x -Achse. Die Polkreise sind durch $\beta = \text{const.}$ gekennzeichnet (Der Winkel $\beta = \beta_1 + \beta_2$

ist in Abb. 2 eingetragen). Die zugehörigen Radien sind mit R_β bezeichnet und die der Apollonischen Kreise mit R_α . Die im Aufpunkt A von den beiden Kräften P herrührenden Spannungen σ_{r_1} und σ_{r_2} nach Gl. (4) sind in Abb. 2 eingetragen. Die damit folgenden, auf das Bipolarkoordinatensystem bezogenen Spannungen σ_α , σ_β und $\tau_{\alpha\beta}$ ergeben sich hieraus zu:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_{r_1} \cos^2 \beta_1 + \sigma_{r_2} \cos^2 \beta_2 \\ &= \frac{P}{\pi} \left(\frac{\cos \varphi_1}{r_1} \cos^2 \beta_1 - \frac{\cos \varphi_2}{r_2} \cos^2 \beta_2 \right) \\ \sigma_\beta &= \sigma_{r_1} \sin^2 \beta_1 + \sigma_{r_2} \sin^2 \beta_2 \\ &= \frac{P}{\pi} \left(\frac{\cos \varphi_1}{r_1} \sin^2 \beta_1 - \frac{\cos \varphi_2}{r_2} \sin^2 \beta_2 \right) \\ \tau_{\alpha\beta} &= \sigma_{r_1} \cos \beta_1 \sin \beta_1 - \sigma_{r_2} \cos \beta_2 \sin \beta_2 \\ &= \frac{P}{\pi} \left(\frac{\cos \varphi_1}{r_1} \cos \beta_1 \sin \beta_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos \varphi_2}{r_2} \cos \beta_2 \sin \beta_2 \right) \end{aligned} \right\} (25)$$

Um die Spannungen dimensionslos darzustellen, setzen wir entsprechend Gl. (18) $(P/2\pi a) = 1$.

Aus Abb. 2 entnimmt man die Beziehungen:

$$r_1 = 2R_\beta \cos \beta_1; \quad r_2 = 2R_\alpha \cos \beta_2 \quad (26a)$$

$$\cos \varphi_1 = \sin \beta_2; \quad \cos \varphi_2 = -\sin \beta_1 \quad (26b)$$

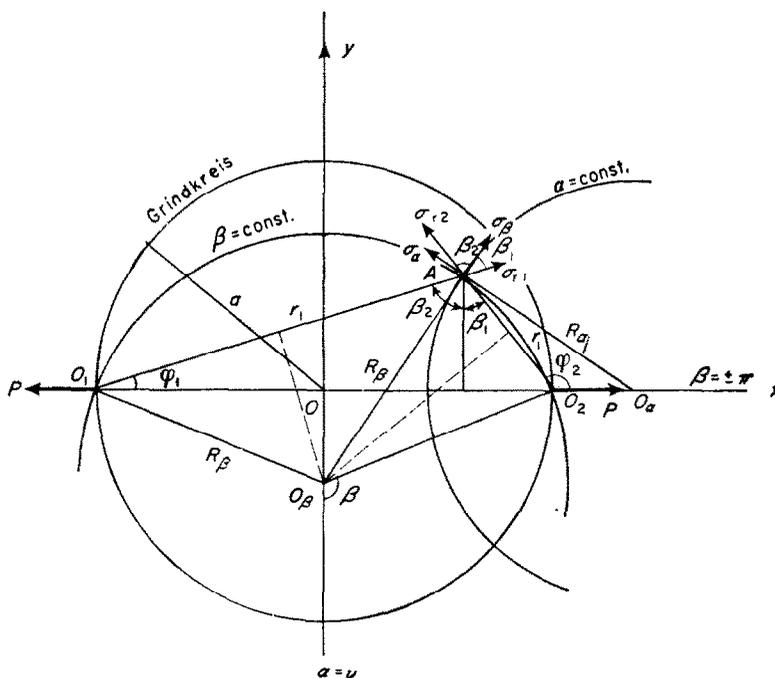
Unter ihrer Berücksichtigung und wegen $\beta_1 + \beta_2 = \beta$ gehen die Gl. (25) über in:

$$\begin{aligned} \sigma_\beta &= \frac{a}{R_\beta} (\cos \beta_1 \sin \beta_2 + \sin \beta_1 \cos \beta_2) \\ &= \frac{a}{R_\beta} \sin \beta = \sin^2 \beta \quad (27a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{a}{R_\beta} \left(\frac{\sin^2 \beta_1 \sin \beta_2}{\cos \beta_1} + \frac{\sin^2 \beta_2 \sin \beta_1}{\cos \beta_2} \right) \\ &= \frac{a}{R_\beta} \sin (\beta_1 + \beta_2) \operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{tg} \beta_2 = \sin^2 \beta \operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{tg} \beta_2; \end{aligned} \quad (27b)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{a}{R_\beta} (\sin \beta_1 \sin \beta_2 - \sin \beta_2 \sin \beta_1) = 0 \quad (27c)$$

Gl. (27c) sagt aus, dass die Normalspannungen σ_α und σ_β überall Hauptspannungen sind. Die


 ABB. 2. Die Bipolar-Koordinaten a und β .

Kreise des Bipolarkoordinatensystems sind demnach Hauptspannungslinien des Spannungszustandes. Nach Gl. (27a) nimmt σ_β längs der Polkreise $\beta = \text{const.}$ konstante Werte an. Denkt man sich eine zu einem beliebigen Polkreis gehörige Kreisscheibe aus der Ebene herausgeschnitten, so halbiert der Polkreis die beiden Lasten P derart, dass auf die Kreisscheibe bei O_1 und O_2 die entgegengesetzt gerichteten Zugkräfte $P/2$ entfallen, während auf die kreisgelochte Ebene bei O_1 und O_2 die zwei entgegengesetzt gerichteten Druckkräfte $P/2$ wirken. Wenn man am Rand der herausgeschnittenen Kreisscheibe einen gleichmässigen Druck $p = -\sin^2 \beta$ aufbringt, der sich als gleichförmiger hydrodynamischer Druck über die ganze Kreisfläche verteilt, so verbleiben als äussere Belastung der Kreisscheibe die beiden Zugkräfte $P/2$ an den Punkten O_1 und O_2 . Der Spannungszustand in der Kreisscheibe unter der Wirkung dieser beiden äusseren Kräfte wird demnach durch die Gl. (27a) und (27b) für σ_α und σ_β wieder gegeben, wenn man noch den hydrodynamischen Druck $p = -\sin^2 \beta$ über-

lagert. Entsprechend bekommt man den Spannungszustand in der kreisgelochten Scheibe unter der Wirkung zweier Druckkräfte $P/2$ bei O_1 und O_2 aus den Gl. (27a) und (27b), wenn man den vom gleichmässigen Druck $p = -\sin^2 \beta$ längs der kreisförmigen Begrenzung herrührenden Spannungszustand in der kreisgelochten Scheibe überlagert. Bei der endgültigen Berechnung der Spannungen ist der Faktor $P/2\pi a$ den Spannungen hinzuzufügen, der nach Gl. (18) gleich i gesetzt worden war.

Bei der Ableitung dieser Ergebnisse hätte man auch von den beiden komplex dargestellten Invarianten nach Gl. (20) und (24) ausgehen können, wenn man den Übergang von der $z = x + iy$ Ebene auf die Koordinaten $\gamma = a + i\beta$ des Bipolarkoordinatensystems mit Hilfe der Beziehung

$$z = a \operatorname{tg} \frac{a + i\beta}{2} \quad (28)$$

oder nach Spaltung dieser Gleichung in Real- und Imaginärteil:

$$x = a \frac{\sin h - a}{\cos h + \cos \beta}; \quad y = a \frac{\sin \beta}{\cos h + \cos \beta}$$

durchgeführt hätte. Diese rein analytische Behandlung der Aufgabe ist aber umständlicher als die obige Darstellung. Die Gl. (27) sollen dazu dienen, die Isochromaten zu berechnen und mit einem spannungsoptischen Versuch zu vergleichen. Da die Spannungen σ_x und σ_y Hauptspannungen sind, so erhält man die Isochromaten aus der Beziehung:

$$\tau_H = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \text{const.} \quad (29)$$

Setzt man die Werte für σ_x und σ_y aus den Gl. (27) ein, so erhält man:

$$\tau_H = \frac{\sin^2 \beta}{2} (\text{tg } \beta_1 \text{tg } \beta_2 - 1) \quad (30)$$

oder wegen der aus Abb. 2 zu entnehmenden Beziehungen

$$\text{tg } \beta_1 = \frac{a - x}{y}; \quad \text{tg } \beta_2 = \frac{a + x}{y};$$

$$\tau_H = \frac{\sin^2 \beta}{2} \left(\frac{a^2 - x^2}{y^2} - 1 \right) = \frac{\sin^2 \beta}{2} \frac{a^2 - r^2}{y^2}, \quad (31)$$

wobei $r^2 = x^2 + y^2$ bedeutet. Auch hier ist zu beachten, dass es sich um die dimensionslose Darstellung der Spannungen handelt und die tatsächlichen Spannungen durch Multiplikation mit $P/2\pi a$ erhalten werden.

Besonders bemerkenswert ist, dass die Null-Isochromate $\tau_H = 0$ dem Grundkreis $r = a$ entspricht. Für alle Punkte innerhalb des Grundkreises ist τ_H positiv, für alle Punkte ausserhalb negativ. Da die Spannungsoptik nur den absoluten Betrag von τ_H an jeder Stelle angibt, so kommt der Unterschied im Vorzeichen von τ_H innerhalb und ausserhalb des Grundkreises spannungsoptisch nicht zur Geltung.

Die Isochromaten $\tau_H = \text{const.}$ werden mit Hilfe von Gl. (31) erhalten, indem man für einige Punkte des Spannungszustandes die Werte von τ_H berechnet und die zu gleichen τ_H -Werten gehörigen Punkte miteinander verbindet. Auf diese Weise sind die in Abb. 3 eingezeichneten Isochromaten überschritten die Null-Isochromate (Grundkreis) in den Polen O_1 und O_2 .

Um dieses theoretisch gefundene Bild der Isochromaten mit einem spannungsoptischen Versuch zu vergleichen, wurde eine spannungs-

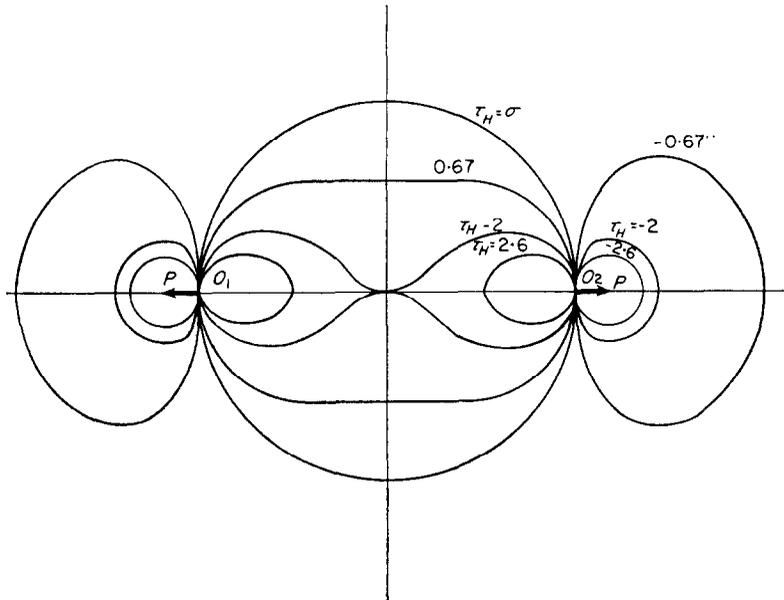


ABB. 3. Die Isochromaten $\tau_H = \text{const.}$

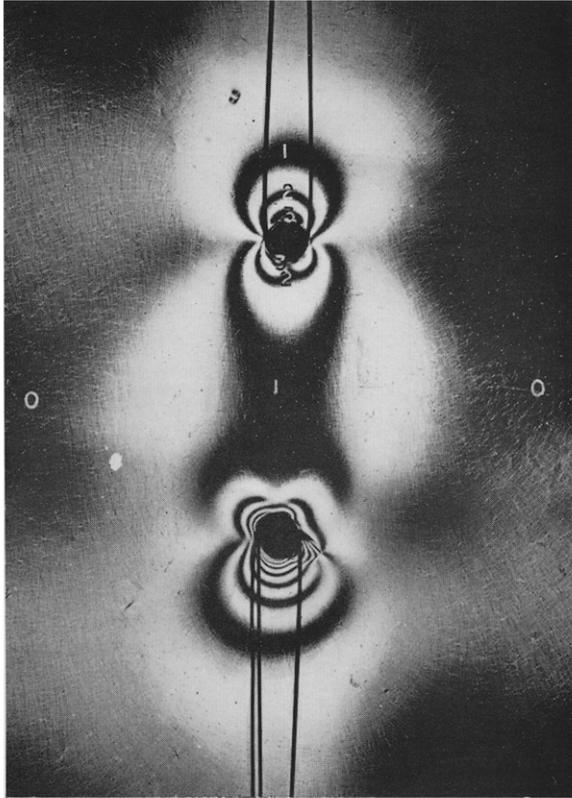


ABB. 4. Isochromaten beim Versuch.

optische Aufnahme mit dem einfarbigen Licht einer Natriumdampfampe durchgeführt. Das Ergebnis zeigt Abb. 4. In der 1 cm dicken Platte aus dem spannungsoptisch aktiven Kunststoff Araldit wurden zwei kreisförmige Löcher gebohrt und gut passende kreisförmige Aralditstäbe durch die Löcher geschoben. Die Zugkräfte P wurden an den Stäben durch beiderseits der Platte wirkende Schnüre hervorgerufen, die im Bild 4 zu sehen sind. Damit die in den Löchern auf die Platte übertragenen Kräfte P sowohl Druck auf der einen Seite der Lochränder als auch Zug auf der entgegengesetzten Seite der Lochränder hervorrufen, wurden die Stäbe in

den Löchern eingeleimt. Ein guter Leim aus Araldit steht hierfür zur Verfügung. Die eingezeichneten Isochromatenordnungen entsprechen dem theoretischen Verlauf nach Abb. 3. Insbesondere tritt die nullte Isochromatenordnung als Kreis durch die Mitten der beiden Stäbe in Erscheinung. Da infolge etwas zu grosser Belastung das eine Loch aufriss, ist im Isochromatenbild eine kleine Störung der Symmetrie eingetreten.

Bei den spannungsoptischen Versuchen hat mir mein früherer Assistent Herr Dr.-Ing. Max Kufner geholfen, wofür ich ihm an dieser Stelle meinen Dank aussprechen möchte.

Abstract—By means of the equilibrium equation and the compatibility equation the two invariables of plane stress are provided as a generally valid function. The stress caused by two counteracting single forces is given as an example. From the theoretical solution the isochromates are calculated and compared with a photoelastic test.

Résumé—L'équation d'équilibre et l'équation de compatibilité permettent de déterminer les deux invariants d'une contrainte plane sous la forme d'une fonction toujours valable. La contrainte produite par deux forces simples qui s'opposent est donnée en exemple. Les isochromes sont calculés à partir de la solution théorique et comparés aux résultats obtenus par photoélasticité.

Аннотация—Рассматриваются с помощью уравнения равновесия и уравнения совместности два случая плоского напряжённого состояния, справедливые повсюду и выраженные через одну функцию. В качестве примера приводится состояние напряженности, вызванное двумя противоположно направленными единичными силами. Из теоретического решения рассчитаны изохромы и проведено сравнение с данными, полученными при изучении напряжённого состояния оптическим путём.